Διάλεξη 2η

Πραγματική Ανάλυση

Θεώρημα: Έστω A αριθμήσιμο, $B \subseteq A$, B άπειρο τότε B αριθμήσιμο.

Αποδ

Υποθέτω ότι $A = \mathbb{N}$. Θέτουμε $f: \mathbb{N} \to B$,

$f(1) = \min B$, $f(2) = \min(B \setminus \{f(1)\})$,

$f(3) = \min(B \setminus \{f(1), f(2)\})$, ...

$f(n) = \min(B \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\})$

Παρατηρώ ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Αφού η f είναι γνησίως αύξ., είναι και "1-1"
Επίσης διαπιστώνω εύκολα ότι είναι επί
Γενική περίπτωση: $\exists\, g: A \to \mathbb{N}$ η οποία είναι 1-1 και επί. Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1 και επί

Θεώρημα: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

i) A το πολύ αριθμήσιμο

ii) $\exists\, B \subseteq \mathbb{N}$ και $f: B \to A$ να είναι επί

iii) $\exists\, g: A \to \mathbb{N}$ τ.ω g να είναι "1-1".

Θεώρημα: Έστω $A_1, A_2, \dots$ αριθμήσιμα σύνολα

i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ αριθμ. σύνολο

ii) $A_1 \times \dots \times A_n$ είναι αρ. σύνολο, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Υπενθύμιση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $A \neq \emptyset$.

Το M είναι άνω φράγμα του A αν $\forall x \in A$: $x \leq M$. Αν $\exists$ άνω φράγμα, το A ονομάζεται άνω φραγμένο.

π.χ.

$(0,1)$: άνω φραγμένο

$(0,\infty)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, κ.ο.κ. : όχι άνω φραγμένο

Αν ένα άνω φράγμα M του A ανήκει στο A, τότε $M = \max A$.

π.χ.

$\sup(0,1) = 1$

Έτσι από τα παραπάνω:

$$\sup A = \begin{cases} \cdot \text{ Το ελάχιστο άνω φράγμα του } A \text{, αν το } A \text{ είναι άνω φραγμένο.} \\ \cdot +\infty \text{, αν το } A \text{ δεν είναι άνω φραγμένο.} \end{cases}$$

παράδειγμα: $A = \{1 - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$, $\sup(A) = ;$

• $1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, A: άνω φράγμα.

Το 1 είναι άνω φράγμα του A.
Αν $M \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A, τότε $M \geq 1$. Έστω ότι $M < 1 \Rightarrow$
Τότε $1 - \frac{1}{2^n} \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \geq 1 - M > 0$

$\Rightarrow 2^n \leq \frac{1}{1-M}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \log \frac{1}{1-M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Άτοπο

Άρα $M \geq 1$.

Αρχιμήδεια ιδιότητα: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $n > x$

Αξίωμα της πληρότητας: Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει supremum.

▶ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. αν $\exists m \in \mathbb{R}$ τ.ω $x \geq m$ $\forall x \in A$, τότε το m είναι κάτω φράγμα του A.
Αν το A έχει κάτω φράγμα, ονομάζεται κάτω φραγμένο. Έτσι έχω ότι:

$\inf A =$ { • Το μέγιστο κάτω φράγμα του A, αν A είναι κάτω φραγμένο. • $-\infty$, το A δεν έχει κάτω φράγμα

Άσκηση: Αν $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και $-A := \{-x, x \in A\}$
Τότε $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup(A)$
(την προσοχή μου/ως) και νδο:
Ειδικότερα το $\inf(A)$, υπάρχει πάντα.

~ o ~ o ~ o ~ o ~ o

Πυκνότητα ρητών και αρρήτων αριθμών στο $\mathbb{R}$:

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Τότε $\exists$ (άπειροι) ρητοί και άρρητοι στο (a, b)

Ορ: Έστω X ένα σύνολο. Μια ακολουθία από το X είναι μια συνάρτηση $x: \mathbb{N} \to X$.
Συμβολισμός: $x_n = x(n)$, $n \in \mathbb{N}$ $(\{x_n\})$

Ορ: Υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία της μορφής $\{x_{k_n}\}$, η οποία είναι γν. αύξουσα και είναι ακολουθία φυσικών αριθμών.

Ορισμοί: • $x_n \to x$ όταν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall n \geq n_0$: $|x_n - x| < \varepsilon$.
• $x_n \to \infty$, όταν $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$: $x_n > M$.
• $x_n \to -\infty$, όταν $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$: $x_n < -M$.

Θεώρημα: Αν υπάρχει $\lim x_n$, τότε είναι μοναδικό.

Απόδ

Έστω ότι $x = \lim x_n \in \mathbb{R}$ και έστω $y = \lim x_n$
Αφού $x = \lim x_n$ τότε $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$: $|x_n - x| < \varepsilon/2$
και αφού $y = \lim x_n$ $\exists n_0'$: $\forall n \geq n_0'$: $|x_n - y| < \varepsilon/2$

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$. Τότε:
$|x-y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$: $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow x = y$

Θεώρημα: Αν $\{x_n\}$ συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη (δηλαδή $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ τ.ω $m \le x \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

Απόδ

Έστω $x = \lim x_n$. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall n \geq n_0$: $|x_n - x| < \varepsilon$. Για $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$:
$|x_n - x| < 1 \iff \forall n \geq n_0: \ -1 + x < x_n < 1 + x$.

Θέτω $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1+x\} \Rightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \le M$ και
$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, x-1\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: x_n \geq m$.

Πρόταση: Αν $a_n \geq \beta_n$, $\forall n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$: σταθερό) τότε αν υπάρχουν τα $\lim(a_n), \lim(\beta_n) \Rightarrow$
$\lim(a_n) \geq \lim(\beta_n)$

Πρόταση: Αν $a_n \le \beta_n \le \gamma_n$, $\forall n \geq n_0$ και
$a_n, \gamma_n \to \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\beta_n \to \ell$.

Απόδ

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0' \in \mathbb{N})$ τ.ω $|a_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0'' \in \mathbb{N})$ τ.ω $|\gamma_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0''$.

Θέτουμε $n_0^* = \max\{n_0, n_0', n_0''\}$. Έτσι
$\forall n \geq n_0^*$: $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$
$\ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon$

Οπότε $\ell - \varepsilon < a_n < \beta_n < \gamma_n < \ell + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0^*$.
$\Rightarrow \beta_n \to \ell$.

Ορ: $\{x_n\}$ αύξουσα (γν.) αν $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\{x_n\}$ φθίνουσα (γν.) αν $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα: Κάθε άνω φραγμένη (κάτω φραγμένη), αύξουσα (φθίνουσα) ακολουθία, συγκλίνει.

Απόδ

Έστω $\{x_n\}$ άνω φραγμένη και αύξουσα.
$\Rightarrow$ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ άνω φραγμένο $\Rightarrow$
$M = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, με $M \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Αν $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $M - \varepsilon < x_{n_0} \leq M$ $\Rightarrow$
$\forall n \geq n_0$, $M - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq M < M + \varepsilon$ $\Rightarrow$
$\forall n \geq n_0$, $|x_n - M| < \varepsilon$ $\Rightarrow$
$x_n \to M$.

Θεώρημα: Αν $\{x_n\}$ αύξουσα (φθίνουσα) και μη φραγμένη τότε $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$).

Απόδ

$(\forall M > 0)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $x_{n_0} > M$ ($\{x_n\}$: αύξουσα)
$\Rightarrow$ $\forall n \geq n_0$, $x_n \geq x_{n_0} > M$.

Ορισμός: Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών.

- $\limsup(x_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n}(x_k)\right) = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} x_k$.

- $\liminf(x_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n}(x_k) = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n}(x_k)$.

Ορισμός: Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ονομάζεται σημείο συσσώρευσης (σ.σ) της $\{x_n\}$, αν $\exists$ υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ τ.ω $x_{k_n} \to l$.

Θεώρημα: Το $\limsup(x_n)$ είναι το μέγιστο σ.σ. της $\{x_n\}$.
Το $\liminf(x_n)$ είναι το ελάχιστο σ.σ της $\{x_n\}$.
Ειδικότερα αν $x_n \to l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ τότε
$\limsup(x_n) = \liminf(x_n) = l$.

Απόδ

$\limsup(-x_n) = -\liminf(x_n)$, $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$
Αρκεί νδο $\limsup(-x_n) = -\liminf(x_n)$
Θδο $\limsup(x_n)$ είναι σ.σ της $\{x_n\}$.
Θέτουμε $u = \limsup(x_n)$. Αν $u = +\infty$, τότε αφού από ορισμό ισχύει $\limsup(x_n) = \lim(y_n)$, $y_n = \sup_{k \geq n}(x_k)$, τότε $\{x_n\}$ όχι άνω φραγμένη.
Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, k_n \in \mathbb{N}$ τ.ω $x_{k_n} > n \Rightarrow x_{k_n} \to \infty$
Ομοίως αν $u = -\infty$. Έστω τώρα ότι $u \in \mathbb{R}$. Για $\varepsilon > 0$
$\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists\, k_n \in \mathbb{N}$: $u - \frac{1}{n} < y_{k_n} < u + \frac{1}{n}$
$\sup_{k \geq n} x_k = y_n$: Για $\varepsilon > 0$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, τ.ω
$y_n - \varepsilon < x_k < y_n$. Για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists\, k_n'$, $k_n' \geq y_n$
τ.ω $y_{k_n} - \frac{1}{n} < x_{k_n'} \leq y_{k_n'}$. Για $y = k_n$:
$y_{n'_{k_n}} - \frac{1}{n} < x_{n'_{k_n}} \leq y_{k'_{k_n}} < u + \frac{1}{n} \Rightarrow x_{n'_{k_n}} \to u$
$\Rightarrow u$ σ.σ. της $\{x_n\}$. Έστω $l \in \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$ σ.σ. της $\{x_n\}$. Αν $l = -\infty \Rightarrow l \leq u$. Αν $l = +\infty \Rightarrow \{x_n\}$ άνω φραγμένη $\Rightarrow u = +\infty \Rightarrow l \leq u$. Αν $l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, \{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ τ.ω $x_{k_n} \to l$. Για $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω $\forall n \geq n_0$, $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$. Αν $y_{k_n} = \sup\{x_{k_n}, x_{k_n+1}, x_{k_n+2}, \dots\} \geq x_{k_n} > l - \varepsilon$
$\Rightarrow u \geq l - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow u \geq l$.//

Πρόταση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $A \neq \emptyset$, $m, M \in \mathbb{R}$

i) $M = \sup A$ αν: α) M άνω φράγμα του A
β) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)$ τ.ω $M - \varepsilon < x$.

ii) $m = \inf A$ αν: α) m κάτω φράγμα του A
β) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)$ τ.ω $x < m + \varepsilon$

Παραδείγματα: ① $x_n = (-1)^n$, τότε $\limsup x_n = 1$ και $\liminf (x_n) = -1$

② $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N} \Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, f 1-1 και επί και $f(n) = q_n$, q_n ακολουθία ρητών, $n \in \mathbb{N}$.
Και έστω $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists q_{k_n} \in \mathbb{Q}$ τ.ω $|q_{k_n} - x| < k \Rightarrow q_{k_n} \to x$

$\Rightarrow x$: σ.σ. της $q_n \Rightarrow \limsup q_n = +\infty$
και $\liminf q_n = -\infty$

Ακολουθίες Cauchy: $\{x_n\}$ Cauchy αν,
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$, $\forall n, m \geq n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Θεώρημα: Η $\{x_n\}$ συγκλίνει αν-ν $\{x_n\}$ Cauchy

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\{x_n\}$ συγκλίνει. Άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω $\forall m, n \geq n_0$ $|x_n - x_m| \leq$
$\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

$\Rightarrow \{x_n\}$: Cauchy

($\Leftarrow$) Έστω $\{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall m, n \geq n_0$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

Για $\varepsilon = 1$: $\forall n \geq n_0$: $|x_n - x_{n_0}| < 1 \Rightarrow x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$
$\forall n \geq n_0$ $\Rightarrow \{x_n\}$ φραγμένη $\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists \{x_{k_n}\}$ υπακ. της $\{x_n\}$ τ.ω $x_{k_n} \to x$, για $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$, $|x_{k_n} - x| < \varepsilon/2$ $(k_n \geq n)$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|x_n - x| = |(x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - x)| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.